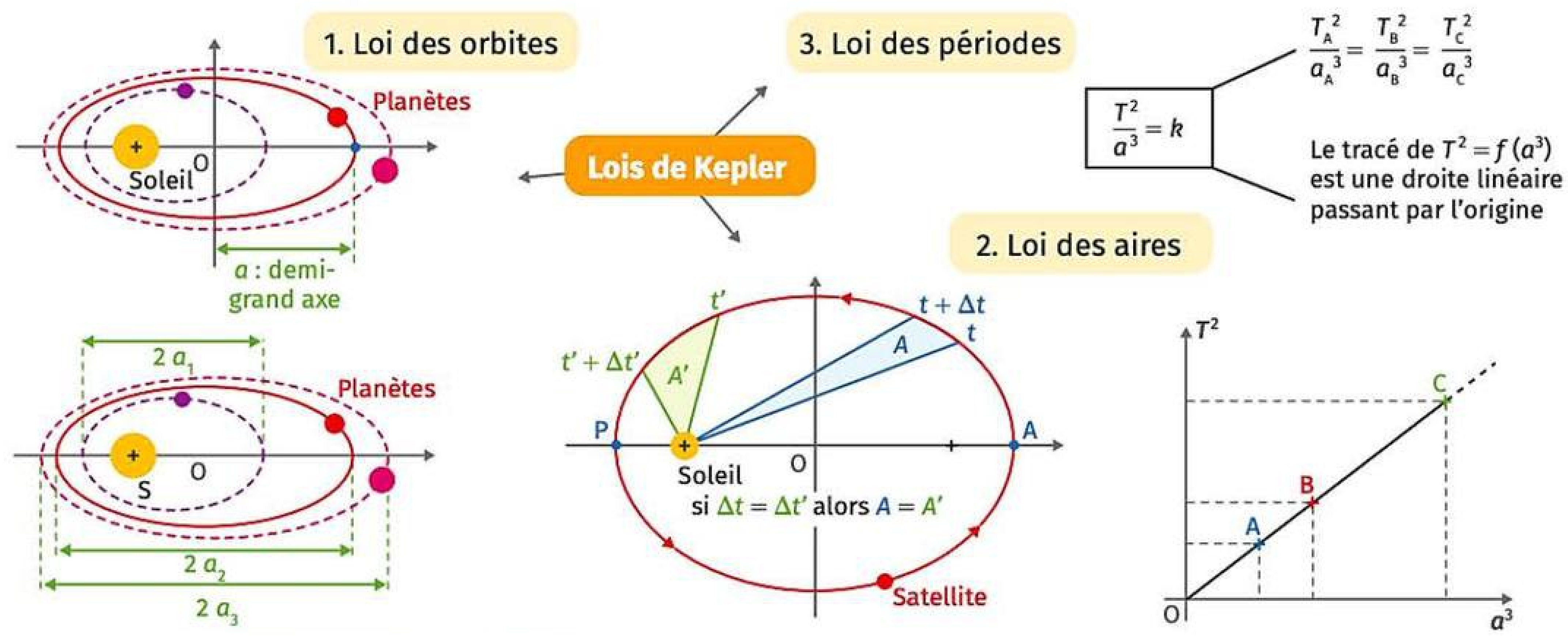
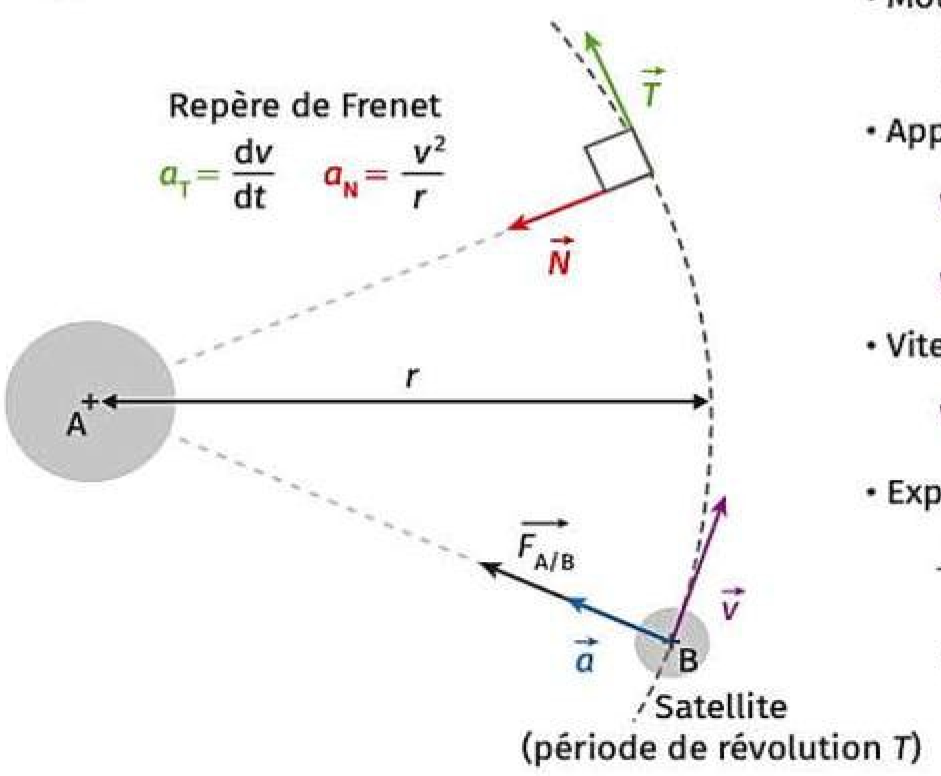
Cours

Trois lois de Kepler



Caractéristiques du mouvement d'un satellite en orbite circulaire

Approximation du mouvement circulaire



- Mouvement circulaire uniforme
  $\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{N}$ ($\vec{a}$ est centripète)
- Application 2e loi de Newton
  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ ($\vec{a}$ est centripète)
  $v =$ cste : mouvement uniforme
- Vitesse orbitale
  $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
- Expression de la constante de la 3e loi de Kepler
  $\frac{T^2}{r^3} = \text{cste} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$
  d'où $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$ ou $r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}}$

Satellite géostationnaire

- Immobile depuis un observateur terrestre
- Contenu dans le plan équatorial de la Terre
- Altitude $h = 36\,000$ km
- Période de révolution $T = 24$ h

ACTIVITÉ D'EXPLORATION

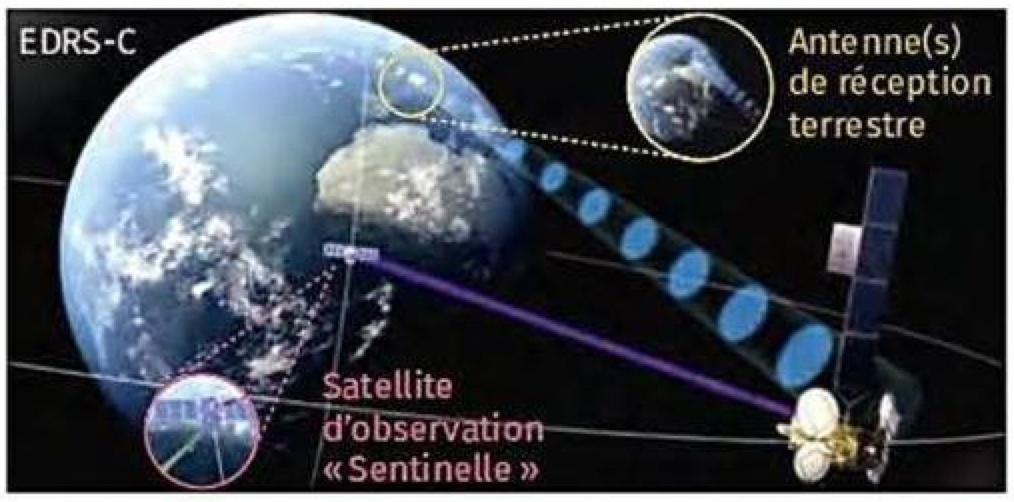
1 EDRS-C, un satellite géostationnaire

Occuppée par près de 27 % du satellite, l'orbite géostationnaire est si encombrée qu'elle doit être surveillée et gérée par l'Union internationale des télécommunications (UTC).

→ **Quelles sont les caractéristiques du mouvement d'un satellite en orbite géostationnaire ?**

Objectif
Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.

Doc. 1 EDRS-C, satellite indispensable



L'EDRS-C est un satellite européen en orbite géostationnaire. Son orbite lui permet de rester en permanence au-dessus de l'Ouganda, à 31° de longitude est.

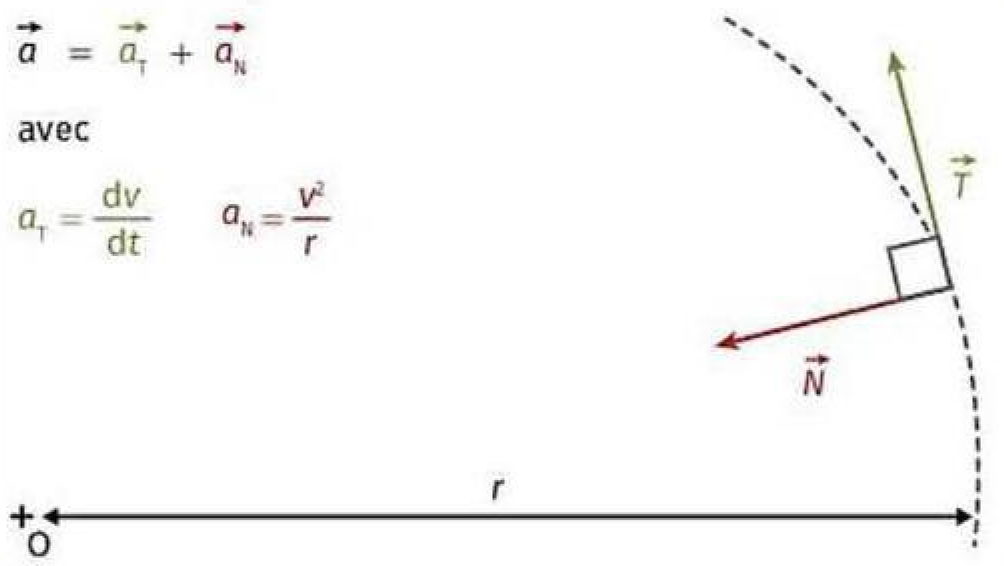
Retrouvez sa trajectoire sur LLS.fr/PCTP344

Doc. 2 Repère mobile de Frenet ($\vec{N}$, $\vec{T}$)

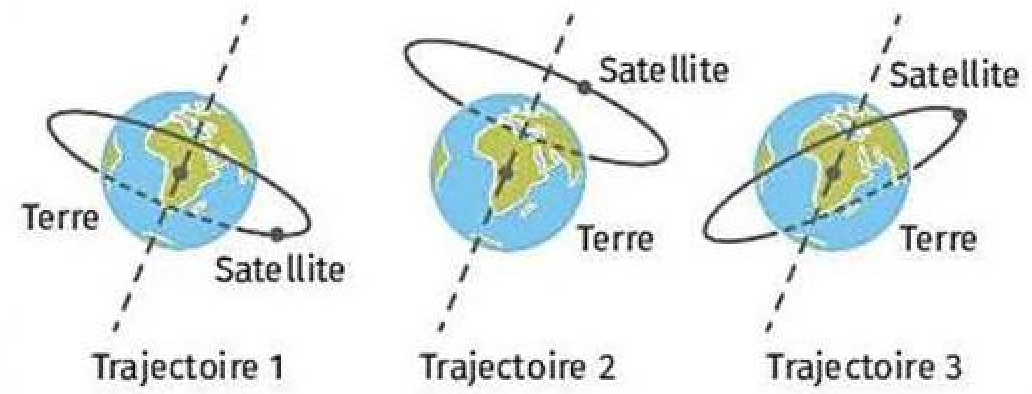
$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

avec

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad a_N = \frac{v^2}{r}$$



Doc. 3 Trajectoires circulaires



Données

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m³·kg⁻¹·s⁻²
- **Caractéristiques de la Terre :** $R_T = 6370$ km, $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg et $T_{rot} = 23$ h 56 min 20 s
- **Masse du satellite EDRS-C :** $m_S = 3{,}20 \times 10^3$ kg

1. Représenter, sans souci d'échelle, la trajectoire du satellite EDRS-C évoluant dans le référentiel géocentrique et exprimer le rayon de l'orbite r de la trajectoire de EDRS-C en fonction du rayon terrestre R_T et de son altitude h.
2. Préciser en quoi l'orbite géostationnaire de EDRS-C est intéressante pour la transmission de signaux depuis et vers un observateur terrestre.
3. Nommer et représenter qualitativement la force exercée par la planète Terre sur le satellite EDRS-C, supposé ponctuel et noté S. Donner son expression vectorielle.
4. Montrer que l'une des trajectoires proposées est incompatible avec l'expression précédente. En déduire la seule correspondant au satellite géostationnaire.
5. En citant la loi utilisée, déterminer l'expression vectorielle de l'accélération $\vec{a}$ du satellite S. Démontrer que la vitesse du satellite est $v_S = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$.
6. Exprimer la période de révolution T_S de EDRS-C et calculer son altitude h.

Synthèse de l'activité

Réaliser une carte mentale résumant les caractéristiques d'un satellite géostationnaire.

- Détermination des caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.
- Détermination de la période de révolution d'un satellite.
- Connaissances des caractéristiques d'un satellite géostationnaire.

Réponses détaillées

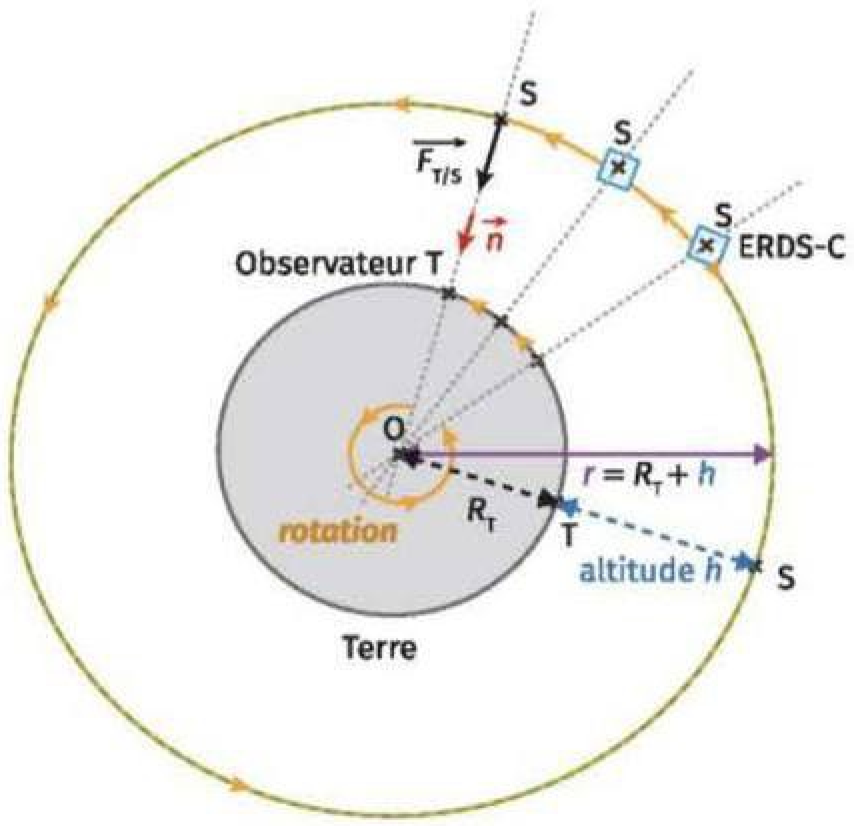
1. D'après le **doc. 1**, le satellite EDRS-C (S) reste en permanence au-dessus de l'Ouganda. Par conséquent, il semble toujours immobile et au zénith pour un observateur terrestre (T) situé à la verticale en dessous. Les points O (centre de gravité de la Terre), T et S restent toujours alignés durant la rotation de la Terre.

De plus, comme l'observateur T décrit une trajectoire circulaire de rayon R_T dans le référentiel géocentrique, EDRS décrira également un cercle dont le rayon sera égal à :

$$r = R_T + h$$

(où h désigne l'altitude au-dessus de la mer)

2. L'orbite géostationnaire est intéressante, car elle permet la transmission de signaux de manière continue avec d'autres bases terrestres ou satellites situés du même côté de la Terre.



3. La force exercée par la planète Terre sur le satellite EDRS-C, supposé ponctuel et noté S, est notée $\overrightarrow{F_{T/S}}$. Elle est portée par la droite reliant les centres de gravité de la Terre et du satellite. L'expression vectorielle de $\overrightarrow{F_{T/S}}$ s'écrit $\overrightarrow{F_{T/S}} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_S}{(r)^2} \cdot \vec{n}$ (voir schéma).

4. La trajectoire 2 est incompatible avec l'expression vectorielle précédente, car la direction de la force $\overrightarrow{F_{T/S}}$ ne passe pas le centre de gravité de la Terre (O), origine du repère géocentrique.

De plus, la trajectoire 3 ne permet pas au satellite d'être toujours situé à la verticale d'un même lieu durant la rotation terrestre.
Ainsi, la trajectoire 1 est le seul possible au satellite pour être géostationnaire.

On remarque également que la trajectoire est contenue dans le plan équatorial (c'est le cas pour tous les satellites géostationnaires).

5. On considère par la suite la seule force que subit le satellite est celle exercée par la Terre. En utilisant la deuxième loi de Newton, on obtient $\overrightarrow{F_{\mathrm{T/S}}} = m_{\mathrm{S}} \cdot \overrightarrow{a}$. En substituant $\overrightarrow{F_{\mathrm{T/S}}}$ par son expression (**question 3**), on déduit l'expression vectorielle du vecteur accélération : $\overrightarrow{a} = G \cdot \frac{M_{\mathrm{T}}}{r^2} \cdot \overrightarrow{n}$

Compte-tenu du mouvement circulaire du satellite, on projette le vecteur accélération dans le repère de Frenet $(\overrightarrow{t}\,;\overrightarrow{n})$, les composantes du vecteur accélération sont (par identification, **doc. 2**) : $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ m·s^{-2} et $a_n = \frac{v_{\mathrm{S}}^2}{r} = G \cdot \frac{M_{\mathrm{T}}}{r^2}$

D'après la première expression, on déduit alors que le mouvement de Titan est uniforme : sa vitesse *v* reste constante tout au long de la trajectoire circulaire.

En exploitant l'expression 2 de la composante normale de l'accélération, on déduit : $v_{\mathrm{S}}{}^2 = G \cdot \frac{M_{\mathrm{T}}}{r}$

D'où l'expression recherchée : $v_{\mathrm{S}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_{\mathrm{T}}}{r}}$

6. Dans le cas d'un mouvement circulaire, la vitesse du satellite se déplaçant à une distance *r* de la Terre est lié à la période *T* selon la relation : $v_{\mathrm{S}} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

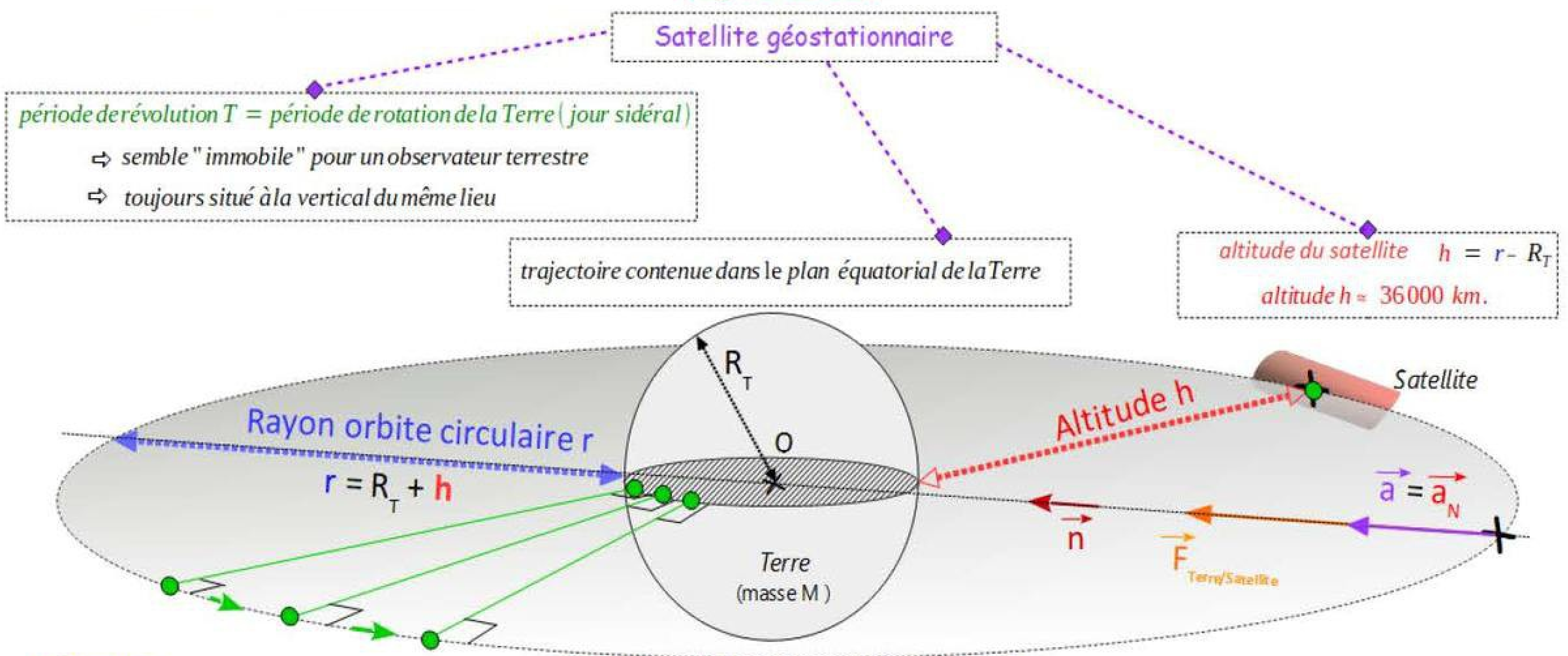
En associant les deux expressions précédentes de la vitesse, on obtient l'expression de la période : $T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}$

De l'expression précédente, on détermine le rayon de l'orbite, puis l'altitude *h* :

$r = \sqrt[3]{G \cdot M_T \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}}$ et $h = r - R_{\mathrm{T}}$ A.N : $r = \sqrt[3]{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24} \times \frac{(23 \times 3\,600 + 56 \times 60 + 20)^2}{4\pi^2}}$

Soit $r \approx 4,22 \times 10^7$ m d'où $h \approx 3,58 \times 10^7$ m (soit 35 800 km).

Synthèse



Méthode :

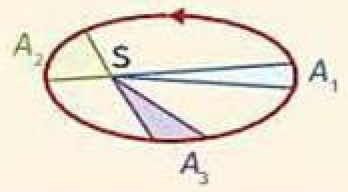
Approximation mouvement circulaire

- *Force d'interaction gravitationnelle*
  $\overrightarrow{F_{Terre/S}} = \frac{G \,.\, M_{Terre} \,.\, m_S}{r^2} . \vec{n}$
- *Application 2ème loi de Newton*
  $\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{r} . \vec{n}$ ($\vec{a}$ est centripète.)
- *Projection dans le repère de Frenet*
  ⇨ $v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$
  ⇨ $v = cste$: mouvement uniforme
- *Vitesse orbitale* $v = \frac{2\pi . r}{T}$ [m.s^{-1}]

⇨ *Période de révolution* $T = 2\pi . \sqrt{\frac{r^3}{G.M}}$ [m] [s] [kg]

⇨ *Rayon de l'orbite* $r = \frac{1}{2\pi} . \sqrt[3]{G.M.T^2}$

1 Lois de Kepler

	A	B	C
1. D'après la première loi de Kepler, l'astre attracteur :	décrit une ellipse.	occupe un des deux foyers d'une ellipse.	n'est soumis à aucune force.
2. On note *T* la période de révolution de la Lune en orbite autour de la Terre. Si *r* représente la distance entre les centres de masse des deux corps, la 3ᵉ loi de Kepler s'écrit :	$\frac{r^2}{T^3} = \text{cste}$	$\frac{T^2}{r^3} = \text{cste}$	$\frac{r^2}{T^2} = \text{cste}$
3. Si les aires sont balayées pendant une même durée : 	$A_1 = A_2 + A_3$	$A_1 = A_3 - A_2$	$A_3 = A_2$

2 Mouvement d'un satellite

	A	B	C
1. Pour décrire le mouvement de Saturne autour du Soleil, le référentiel le plus adapté est :	saturno-centrique.	géocentrique.	héliocentrique.
2. La vitesse *v* d'un satellite, situé à une distance *r* du centre d'un astre et en mouvement circulaire, est :	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$	$v = \sqrt{\frac{G \cdot r}{M}}$	$v = \sqrt{G \cdot M \cdot r}$

3 Satellite géostationnaire

	A	B	C
1. Un satellite en orbite géostationnaire possède :	une altitude précise.	une période de révolution égale à celle de la Terre.	une orbite passant par l'axe polaire Nord-Sud.
2. Un satellite géostationnaire décrit un mouvement circulaire dans :	un plan des pôles.	le plan équatorial.	n'importe quel plan passant par le centre de la Terre.

4 Questions Jeopardy

- Formuler pour chaque proposition une question dont la réponse serait :

  a. La vitesse d'un satellite est d'autant plus grande que son altitude est basse.

  b. Pour une orbite circulaire, sa valeur est constante tout au long de l'orbite.

Réponses

1. Lois de Kepler

1. D'après la première loi de Kepler, l'astre attracteur :

B. occupe un des deux foyers d'une ellipse.

2. On note *T* la période de révolution de la Lune en orbite autour de la Terre. Si *r* représente la distance entre les centres de masse des deux corps, la 3ᵉ loi de Kepler s'écrit : B. $\frac{T^2}{a^3} = k$ (cste)

3. Si les aires sont balayées pendant une même durée :

Le schéma illustre la 2ᵉ loi de Kepler (loi des aires) qui se traduit par une égalité entre les surfaces balayées par le rayon vecteur pour une durée de parcours identique.

C. $A_3 = A_2$ (= A_1)

2. Mouvement d'un satellite

1. Pour décrire le mouvement de Saturne autour du Soleil, le référentiel le plus adapté est :

C. héliocentrique.

2. La vitesse *v* d'un satellite, situé à une distance *r* du centre d'un astre et en mouvement circulaire, est :

A. $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M}{r}}$

3. Satellite géostationnaire

1. Un satellite en orbite géostationnaire possède :

A. une altitude précise (environ 36 000 km). De plus cette orbite possède une période de rotation égale à celle de la Terre (24 h).

2. Un satellite géostationnaire décrit un mouvement circulaire dans :

B. le plan équatorial.

4. Jeopardy

a. Comment varie la valeur de la vitesse d'un satellite en fonction de son altitude ?

b. Comment varie la valeur de la vitesse d'un satellite en orbite circulaire ?

Pour s'échauffer

5 Trajectoire d'Uranus

Lors de sa révolution, Uranus passe au plus près du Soleil à une distance de $2{,}74 \times 10^{12}$ m et au plus loin à une distance de $3{,}00 \times 10^{12}$ m.

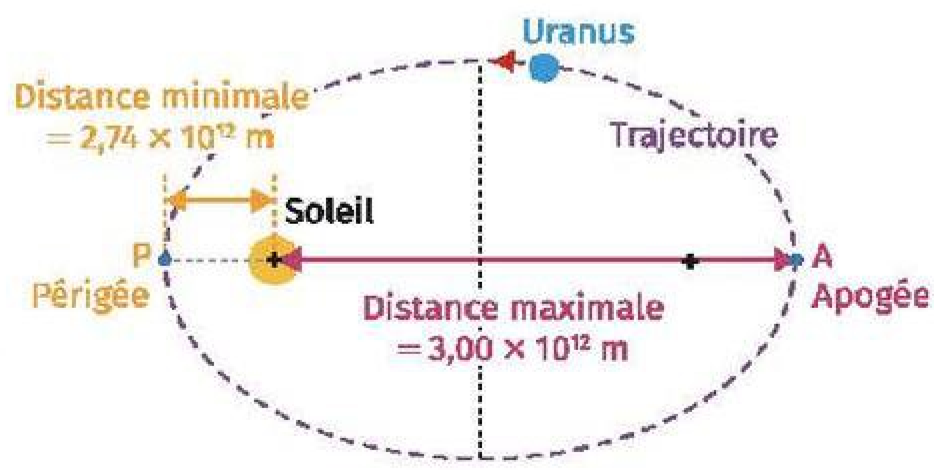
- Caractériser la nature de l'orbite d'Uranus.

6 Interaction gravitationnelle terrestre

Avec la mission Proxima, Thomas Pesquet est le dixième Français à s'être rendu à bord de la Station spatiale internationale (ISS), située à une altitude *h* considérée constante et voisine de 400 km.

1. Schématiser la trajectoire de l'ISS en orbite autour de la Terre en indiquant le rayon terrestre et l'altitude *h*.
2. Après avoir représenté la force $\vec{F}_{T/ISS}$ exercée par la Terre sur l'ISS, donner l'expression littérale de cette force en précisant les unités de chaque grandeur.

Pour s'échauffer

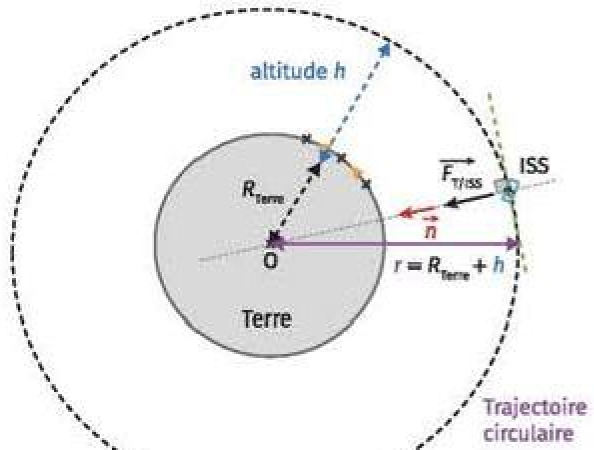


5. Trajectoire d'Uranus

◆ Lors de la révolution d'Uranus autour du Soleil, sa distance vis-à-vis de ce dernier passe par une valeur minimale ($2{,}74 \times 10^{12}$ m : le périgée) et une valeur maximale ($3{,}00 \times 10^{12}$ m : l'apogée). Par conséquent, Uranus se déplace autour du Soleil suivant une ellipse (1re loi de Kepler).

6. Interaction gravitationnelle terrestre

1. La station spatiale ISS gravite autour de la Terre suivant un cercle de rayon $r = R_{Terre} + h$.



2. La force d'interaction gravitationnelle, $\overrightarrow{F_{\mathrm{T/ISS}}}$ exercée par la Terre sur la station S est centripète et dirigée suivant la droite reliant les deux centres de masse.

L'expression vectorielle de la force $\overrightarrow{F_{\mathrm{T/ISS}}}$ est $\overrightarrow{F_{\mathrm{T/ISS}}} = G \cdot \dfrac{M_{\mathrm{Terre}} \cdot m_{\mathrm{ISS}}}{(R_{\mathrm{Terre}} + h)^2} \cdot \vec{n}$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal unitaire centripète tel que :

- les masses M_{Terre} et m_{ISS} s'expriment en kilogramme (kg) ;
- les distances R_{Terre} et h s'expriment en mètre (m) ;
- G la constante de gravitation universelle est égale à $6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².